# לוגיקה מתמטית תשע"ב - תרגיל 7 – תורת הגרפים

### שאלה 0 - שאלת חימום.

**נתונים הגרפים הבאים:**

**גרף 1 גרף 2**

1. **מהו המרחק בין A ל- D בשני הגרפים ?**

2.

1. **מהו הקוטר של שני הגרפים ?**

אינסוף.

1. **חשב את הדרגה של גרף 1 ושל גרף 2 . (כלומר סכום דרגות הקדקדים).**

גרף 1: 10. גרף 2: 8 לכל כיוון.

1. **חשב את ה- din וה- dout של כל קודקוד בגרף 1 ובגרף 2.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| קדקוד | גרף 1 | גרף 2 in | גרף 2 out |
| A | 1 | 2 | 1 |
| B | 3 | 2 | 2 |
| C | 4 | 1 | 3 |
| D | 2 | 2 | 1 |
| G | 0 | 0 | 1 |
| H | - | 1 | 0 |
| I | - | 0 | 0 |

1. **כמה רכיבי קשירות יש לכל אחד מהגרפים ?**

לגרף 1 יש 2, ולגרף 3 יש 3.

1. **בנה מטריצת סמיכות לשני הגרפים.**

### גרף 1

### הערה: לא ברור לי אם הלולאה נחשבת כאחת או כשתיים.גרף 2

### ~~שאלה 1~~

**~~ענו כן או לא ותנו הסבר קצר:~~**

**~~א) בגרף השלם יש מעגל אוילר אם ורק אם  זוגי.~~**

לא. ב אין מעגל אוילר.

**~~ב) יש גרף בן 6 קדקדים שדרגותיו .~~**

לא. מכיון שיש שני קדקדים בעלי דרגה 5, לא ייתכן קדקוד בעל דרגה 1 (אא"כ יש לולאות, ואז זה כבר סיבוך אחר...).

**~~ג) יש גרף בעל מסלול אוילר שדרגותיו .~~**

לא. יש 4 קדקודים בעלי דרגה אי-זוגית.

**~~ד) קיים גרף מישורי בעל 8 קדקדים כך שדרגת כל קדקד היא 5.~~**

**~~ה) אם  לכל  אז  קשיר.~~**

**~~ו) . . אם  אז יש מעגל ב .~~**

**~~ז)יש גרף בן 6 קדקדים שדרגותיו .~~**

**~~ח) אם  גרף אוילריאני אז  מישורי.~~**

**~~ט) אם  לכל  אז  קשיר.~~**

**~~י) נניח ש . אם  אז יש מעגל ב .~~**

### גרף נקרא רגולרי אם לכל הקדקדים שלו אותה דרגה.

**~~יא) קיים גרף 7 – רגולרי בעל 71 קדקדים.~~**

**~~יב) קיים עץ שסדרת הדרגות שלו היא: .~~**

### שאלה 2

**~~יהי  גרף לא מכוון. הוכח כי אם  אינו קשיר אז הגרף המשלים  קשיר.~~**

**~~(הגרף המשלים מוגדר כך: קדקדיו הם הקדקדים של  ו  היא צלע של  אם ורק אם  אינה צלע של . )~~**

### ~~שאלה 3~~

**~~גרף פטרסן מוגדר כך:~~**

**~~תהי . לכל קבוצה בעלת שני איברים מתוך  מתאים קדקד. נחבר שני קדקדים  ע"י צלע אם הם מתאימים לזוגות זרים כלומר  כאשר .~~**

**~~לדוגמא:  ו  מחוברות ע"י צלע אבל  ו אינן מחוברות.~~**

1. **~~בלי לצייר את הגרף, מצא מהו מספר הקדקדים בגרף. (הוכח תשובתך).~~**
2. **~~בלי לצייר את הגרף, מצא מהו מספר הצלעות בגרף. (הוכח תשובתך).~~**
3. **~~בלי לצייר את הגרף, מצא מהי דרגת כל קדקד. (הוכח תשובתך).~~**
4. **~~האם הגרף הוא עץ? הוכח.~~**

### ~~שאלה 4~~

**~~לכל n טבעי נגדיר את הגרף  כך:  ו .~~**

**~~בדוק עבור אילו ערכי  הגרף  דו חלקי ועבור אילו ערכים אינו דו חלקי.~~**

**~~חלק ל 4 מקרים לפי השארית בחלוקת n ב 4.~~**

### ~~שאלה 5~~

**~~איזה מהרשימות הבאות יכולה להיות רשימת הדרגות של קדקדי גרף ?~~**

* 1. **~~5,4,2,3,1,2,0~~**
  2. **~~5,4,3,2,2,0~~**
  3. **~~2,3,2,3,2,3,2,3,2~~**
  4. **~~4,3,2,1.~~**

### שאלה 6

**א. תהי  קבוצה סופית כלשהיא . נגדיר גרף לא מכוון  באופן הבא : קדקדי  מתאימים לתת קבוצות של U . אם  אז  אם ורק אם [ וגם ( או )].**

**מצא שתי קבוצות זרות  ו  בתוך  ההופכות את הגרף לדו חלקי. הוכח תשובתך.**

נאמר את ההגדרה הנ"ל בעברית מדוברת: יש קשת בין הקבוצות אמ"ם הקבוצה A שווה לקבוצה B בתוספת איבר אחד או בהפחתת איבר אחד. ובכתיב מתימטי:

מסקנות מיידיות:

* יש קשת מהקבוצה הריקה לכל קבוצה שעוצמתה 1.
* יש קשת מכל קבוצה שעוצמתה 2 לשתי קבוצות (בדיוק) שעוצמתן 1.
* יש קשת מכל קבוצה שעוצמתה 3 לשלש קבוצות (בדיוק) שעוצמתן 2.
* כל קשת עוברת בין קבוצה שעוצמתה לקבוצה שעוצמתה .
* כל קשת עוברת בין קבוצה שעוצמתה זוגית לקבוצה שעוצמתה אי-זוגית.
* אלו הקבוצות שעצמתן אי-זוגית, ואילו אלו הקבוצות שעצמתן זוגית (לרבות הקבוצה הריקה).

מ.ש.ל.

### ~~שאלה 7~~

**~~הוכח שאם הוא עץ בעל n קדקדים אז ~~**

### ~~שאלה 8~~

**~~יהי  גרף (פשוט ולא מכוון). נתון:  וכן . הוכיחו: הגרף מכיל משולש (כלומר קיימים  שונים כך שמתקיים ).~~**

### שאלה 9

**יהי  גרף (פשוט ולא מכוון). נתון:  וכן . הוכיחו: בגרף יש מסלול פשוט (מסילה) באורך 2 (כלומר קיימים  שונים כך שקיים מסלול ).**

נניח בשלילה כי לא קיימת מסילה באורך 2. כיון שכך כל קדקוד שיוצאת ממנו צלע הוא מחובר לקדקוד אחד בלבד, ושניהם יוצרים רכיב-קשירות.

אם כן – יש לנו 5 רכיבי קשירות שבכל אחד שני קדקודים וצלע אחת.

כאן יש לנו סה"כ 5 קשתות, ואי אפשר להוסיף עוד צלע, ומכאן , אך נתון כי , הגענו לסתירה, ולכן הנחתנו היתה שגויה.

מ.ש.ל.

### שאלה 10

**הוכח שמספר המקסימלי של צלעות בגרף מכוון הוא בעל n צלעות הוא n(n-1)**

הטענה שגויה. לא ייתכן שיש n צלעות וגם יש צלעות.

כנראה הכוונה היתה למספר הצלעות המקסימלי בגרף מכוון בעל קדקודים, ואת זה אוכיח:

המספר המקסימלי מתקבל כאשר מכל קדקוד יוצאת צלע לכל קדקוד אחר. ישנם קדקודים, ומכל אחד יוצאת צלע ל קדקודים, ומכאן שמספר הצלעות הוא בדיוק .

(הדבר שקול לבחירה של 2 קדקודים מתוך הקבוצה כאשר הסדר משמעותי וחזרה אסורה).

### ~~שאלה 11~~

**~~נתון הגרף הבא :~~**

גרף 4

**~~נניח ש- A היא מטריצת סמיכות של גרף 4 בציור.~~**

**~~חשב את A~~~~T~~ ~~ושרטט הגרף שלה. מה משמעות הגרף שקיבלת ביחס ל-G ?~~**

1. **~~חשב AA~~~~T~~~~. מה המשמעות של כל איבר במטריצה שלא נמצא על האלכסון. מה המשמעות של כל איבר הנמצא על האלכסון.~~**
2. **~~חשב A~~~~T~~~~A. מה המשמעות של כל איבר במטריצה שלא נמצא על האלכסון. מה המשמעות של כל איבר הנמצא על האלכסון.~~**
3. **~~חשב A~~~~2~~ ~~ו-~~ ~~3~~~~. A מה המשמעות שלהן?~~**
4. **~~נסח משפט כללי ל - A~~~~n~~ ~~.~~**

### שאלה 12

1. **~~1. מי מהגרפים האלה הם איזומורפיים (אם יש כאלה) ?~~**

### שאלה 13

**א. הוכח שכל גרף מישורי קשיר יש קדקד בעל דרגה לכל היותר 5.**

**ב. הוכח שאם לגרף מישורי וקשיר G בעל  קדקדים ו  צלעות אין מעגלים מאורך 3 אז **

**ג. הסק ש  אינו מישורי.**

לא למדנו גרף מישורי, והמתרגל (נתנאל אלטשולר) אמר שאין צורך לענות על זה.

### שאלה 14

**האם כל גרף שמקיים  הוא בהכרח מישורי ? הוכח את תשובתך.**

לא למדנו גרף מישורי, והמתרגל (נתנאל אלטשולר) אמר שאין צורך לענות על זה.

### ~~שאלה 15~~

**~~מצא נוסחת אויילר עבור גרפים לא קשירים, בהינתן ש- מספר מרכיבי הקשירות בגרף.~~**

### ~~שאלה 16~~

**~~תזכורת : מותן בגרף הוא אורך המעגל הקצר ביתר בגרף.~~**

**~~הוכיחו שעבור כל גרף מישורי, קשיר, עם  קודקודים ו- צלעות ומותן  מתקיים .~~**

### שאלה 17

**הוכיחו כי בכל גרף מישורי פשוט עם לפחות 4 קודקודים, יש לפחות 4 קודקודים עם דרגה קטנה מ-6.**

לא למדנו גרף מישורי, והמתרגל (נתנאל אלטשולר) אמר שאין צורך לענות על זה.

### ~~שאלה 18~~

***~~הוכיחו כי אם בגרף פשוט מתקיים לכל זוג קודקודים לא סמוכים x,y: , אז הגרף קשיר.~~***

### ~~שאלה 19~~

**~~יהי  גרף לא מכוון , , ולכל  כך ש- ~~**

**~~מתקיים . הוכח כי ב- קיים מסלול המילטון.~~**

### ~~שאלה 20~~

**~~יהי G=(V,E) גרף. הוכח שאם |V| = n, |E| = n+4, ואם לכל v∈V קיים deg(v) ≥ 3 אזי~~**

**~~n ≤ 8.~~**

### ~~שאלה 21~~

**~~יהי G=(V,E) גרף. הוכח שאם |V| = 2n, ואם לכל v∈V קיים deg(v) ≥ n אזי G קשיר.~~**

### ~~שאלה 22~~

**~~הגדרה:גרף קשיר  נקרא פאון משוכלל אם הוא מישורי, לכל קודקוד דרגה  בדיוק, וכל פאה מוקפת  צלעות בדיוק.~~**

**~~נתון כי  פאון משוכלל עם  פאות.~~**

**~~א) הוכח כי  הסק ש- ~~**

**~~ב) הוכח כי .~~**

**~~ג) הוכח כי יש חמש אפשרויות לערכים :  והצג את האפשרויות בטבלה.~~**

**~~ד) צייר את 5 אפשרויות שמצאת במישור.~~**

### ~~שאלה 23~~

**~~יהי  גרף לא מכוון , , ולכל  כך ש- ~~**

**~~מתקיים . הוכח כי ב- קיים מסלול המילטון.~~**

### ~~שאלה 24~~

### ~~יהי G=(V,E) גרף. הוכח שאם |V| = n, |E| = n+4, ואם לכל v∈V קיים deg(v) ≥ 3 אזי n ≤ 8. שאלה 25~~

**~~יהי G=(V,E) גרף. הוכח שאם |V| = 2n, ואם לכל v∈V קיים deg(v) ≥ n אזי G קשיר.~~**

### להגשה: 6,9,10,13,14,17