# לוגיקה מתמטית תשע"ב - תרגיל 7 – תורת הגרפים

### שאלה 0 - שאלת חימום.

**נתונים הגרפים הבאים:**

**גרף 1 גרף 2**

1. **מהו המרחק בין A ל- D בשני הגרפים ?**

2.

1. **מהו הקוטר של שני הגרפים ?**

אינסוף.

1. **חשב את הדרגה של גרף 1 ושל גרף 2 . (כלומר סכום דרגות הקדקדים).**

גרף 1: 10. גרף 2: 8 לכל כיוון.

1. **חשב את ה- din וה- dout של כל קודקוד בגרף 1 ובגרף 2.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| קדקוד | גרף 1 | גרף 2 in | גרף 2 out |
| A | 1 | 2 | 1 |
| B | 3 | 2 | 2 |
| C | 4 | 1 | 3 |
| D | 2 | 2 | 1 |
| G | 0 | 0 | 1 |
| H | - | 1 | 0 |
| I | - | 0 | 0 |

1. **כמה רכיבי קשירות יש לכל אחד מהגרפים ?**

לגרף 1 יש 2, ולגרף 3 יש 3.

1. **בנה מטריצת סמיכות לשני הגרפים.**

### גרף 1

### הערה: לא ברור לי אם הלולאה נחשבת כאחת או כשתיים.גרף 2

### ~~שאלה 1~~

**~~ענו כן או לא ותנו הסבר קצר:~~**

**~~א) בגרף השלם יש מעגל אוילר אם ורק אם  זוגי.~~**

לא. ב אין מעגל אוילר.

**~~ב) יש גרף בן 6 קדקדים שדרגותיו .~~**

לא. מכיון שיש שני קדקדים בעלי דרגה 5, לא ייתכן קדקוד בעל דרגה 1 (אא"כ יש לולאות, ואז זה כבר סיבוך אחר...).

**~~ג) יש גרף בעל מסלול אוילר שדרגותיו .~~**

לא. יש 4 קדקודים בעלי דרגה אי-זוגית.

**~~ד) קיים גרף מישורי בעל 8 קדקדים כך שדרגת כל קדקד היא 5.~~**

**~~ה) אם  לכל  אז  קשיר.~~**

לא נכון. לדוגמא: גרף בעל שני רכיבי קשירות שכל אחד מהם הוא .

**~~ו) . . אם  אז יש מעגל ב .~~**

נכון.

**~~ז)יש גרף בן 6 קדקדים שדרגותיו .~~**

לא נכון. סכום הדרגות אי-זוגי.

**~~ח) אם  גרף אוילריאני אז  מישורי.~~**

**~~ט) אם  לכל  אז  קשיר.~~**

ראה לעיל ה.

**~~י) נניח ש . אם  אז יש מעגל ב .~~**

ראה לעיל ו.

### גרף נקרא רגולרי אם לכל הקדקדים שלו אותה דרגה.

**~~יא) קיים גרף 7 – רגולרי בעל 71 קדקדים.~~**

לא נכון. סכום הדרגות אי-זוגי.

**~~יב) קיים עץ שסדרת הדרגות שלו היא: .~~**

לא נכון. סכום הדרגות אי-זוגי.

### שאלה 2

**~~יהי  גרף לא מכוון. הוכח כי אם  אינו קשיר אז הגרף המשלים  קשיר.~~**

**~~(הגרף המשלים מוגדר כך: קדקדיו הם הקדקדים של  ו  היא צלע של  אם ורק אם  אינה צלע של . )~~**

נחלק את קדקודי הגרף לשתי קבוצות זרות ולא-ריקות, כך שאין בגרף G שום צלע ביניהם. נסמן חלקים אלו .

(אם לא ניתן ליצור שתי קבוצות כאלו – אז הגרף G הינו גרף קשיר).

בגרף המשלים יש קשת מכל קדקוד המופיע ב לכל קדקוד המופיע ב (ע"פ ההגדרה), ולכן קוטר הגרף הוא לא יותר מ2!

### ~~שאלה 3~~

**~~גרף פטרסן מוגדר כך:~~**

**~~תהי . לכל קבוצה בעלת שני איברים מתוך  מתאים קדקד. נחבר שני קדקדים  ע"י צלע אם הם מתאימים לזוגות זרים כלומר  כאשר .~~**

**~~לדוגמא:  ו  מחוברות ע"י צלע אבל  ו אינן מחוברות.~~**

1. **~~בלי לצייר את הגרף, מצא מהו מספר הקדקדים בגרף. (הוכח תשובתך).~~**

מספר הקדקודים בגרף הוא , כי זו בחירה של 2 מתוך 5.

1. **~~בלי לצייר את הגרף, מצא מהו מספר הצלעות בגרף. (הוכח תשובתך).~~**

כל צלע מכילה ארבעה מספרים מתוך חמשה, ולכן מדובר על אפשרויות כלליות, אך לכל ארבעה מספרים כאלו יש שלש צלעות, כי אחרי שמיקמנו מספר כלשהו באחד הקדקודים, יש לנו שלש אפשרויות לבחור איזה מספר יהיה איתו בקבוצה.

סה"כ:

1. **~~בלי לצייר את הגרף, מצא מהי דרגת כל קדקד. (הוכח תשובתך).~~**

כאשר אנו מתבוננים בקדקוד, אז יוצאות ממנו צלעות לקדקודים המכילים שניים מתוך שלשת המספרים שאינם שייכים לקדקוד זה. לכן מדובר על בחירה של 2 מתוך 3: .

1. **~~האם הגרף הוא עץ? הוכח.~~**

לא. ניתן למצוא בתוכו מעגל. לדוגמא:

### ~~שאלה 4~~

**~~לכל n טבעי נגדיר את הגרף  כך:  ו .~~**

**~~בדוק עבור אילו ערכי  הגרף  דו חלקי ועבור אילו ערכים אינו דו חלקי.~~**

**~~חלק ל 4 מקרים לפי השארית בחלוקת n ב 4.~~**

### ~~שאלה 5~~

**~~איזה מהרשימות הבאות יכולה להיות רשימת הדרגות של קדקדי גרף ?~~**

* 1. **~~5,4,2,3,1,2,0~~**

לא יתכן. סכום הדרגות אי-זוגי.

* 1. **~~5,4,3,2,2,0~~**

לא יתכן שיש דרגה 5, ואין חמשה קדקודים נוספים שדרגתם גדולה מאפס.

* 1. **~~2,3,2,3,2,3,2,3,2~~**

ייתכן (ציירתי מעגל גדול, עם שני קוים נוספים שגורמים לארבעה קדקודים להיות מדרגה 3).

* 1. **~~4,3,2,1.~~**

לא יתכן שיש דרגה 4, ואין ארבעה קדקודים נוספים שדרגתם גדולה מאפס.

### שאלה 6

**א. תהי  קבוצה סופית כלשהיא . נגדיר גרף לא מכוון  באופן הבא : קדקדי  מתאימים לתת קבוצות של U . אם  אז  אם ורק אם [ וגם ( או )].**

**מצא שתי קבוצות זרות  ו  בתוך  ההופכות את הגרף לדו חלקי. הוכח תשובתך.**

נאמר את ההגדרה הנ"ל בעברית מדוברת: יש קשת בין הקבוצות אמ"ם הקבוצה A שווה לקבוצה B בתוספת איבר אחד או בהפחתת איבר אחד. ובכתיב מתימטי:

מסקנות מיידיות:

* יש קשת מהקבוצה הריקה לכל קבוצה שעוצמתה 1.
* יש קשת מכל קבוצה שעוצמתה 2 לשתי קבוצות (בדיוק) שעוצמתן 1.
* יש קשת מכל קבוצה שעוצמתה 3 לשלש קבוצות (בדיוק) שעוצמתן 2.
* כל קשת עוברת בין קבוצה שעוצמתה לקבוצה שעוצמתה .
* כל קשת עוברת בין קבוצה שעוצמתה זוגית לקבוצה שעוצמתה אי-זוגית.
* אלו הקבוצות שעצמתן אי-זוגית, ואילו אלו הקבוצות שעצמתן זוגית (לרבות הקבוצה הריקה).

מ.ש.ל.

### ~~שאלה 7~~

**~~הוכח שאם הוא עץ בעל n קדקדים אז ~~**

ידוע כי , ולכן המשפט הנ"ל שקול לאמירה כי בעץ (בעל קדקוד אחד לפחות) מתקיים , ואת זה נוכיח באינדוקציה:

בדיקה: כאשר אז לכל גרף. כאשר אז לכל גרף קשיר.

נניח כי הטענה נכונה כאשר , כלומר: , ונוכיח כי הטענה נכונה כאשר :

יהי עץ בעל קדקודים. נוסיף לו קדקוד אחד, ונחבר אותו בצלע לאחד הקדקודים הקיימים. הגדלנו עכשיו את מספר הצלעות מ ל. כל צלע נוספת שנוסיף – תיצור לנו מעגל! מ.ש.ל.

### ~~שאלה 8~~

**~~יהי  גרף (פשוט ולא מכוון). נתון:  וכן . הוכיחו: הגרף מכיל משולש (כלומר קיימים  שונים כך שמתקיים ).~~**

פתרונו של המתרגל נתנאל אלטשולר: אם נסיר שלש צלעות מ, כך שאין זוג צלעות מאלו המתייחסות לקדקוד אחד – עדיין הגרף שקיבלנו מכיל את . אם יש זוג אחד מהנ"ל המתייחס לקדקוד אחד – יהיה לנו גרף המכיל את , ואם שלשת הצלעות מרכיבות משולש אז הגרף שלנו מכיל את !

נזכור כי: .

### שאלה 9

**יהי  גרף (פשוט ולא מכוון). נתון:  וכן . הוכיחו: בגרף יש מסלול פשוט (מסילה) באורך 2 (כלומר קיימים  שונים כך שקיים מסלול ).**

נניח בשלילה כי לא קיימת מסילה באורך 2. כיון שכך כל קדקוד שיוצאת ממנו צלע הוא מחובר לקדקוד אחד בלבד, ושניהם יוצרים רכיב-קשירות.

אם כן – יש לנו 5 רכיבי קשירות שבכל אחד שני קדקודים וצלע אחת.

כאן יש לנו סה"כ 5 קשתות, ואי אפשר להוסיף עוד צלע, ומכאן , אך נתון כי , הגענו לסתירה, ולכן הנחתנו היתה שגויה.

מ.ש.ל.

### שאלה 10

**הוכח שמספר המקסימלי של צלעות בגרף מכוון הוא בעל n צלעות הוא n(n-1)**

הטענה שגויה. לא ייתכן שיש n צלעות וגם יש צלעות.

כנראה הכוונה היתה למספר הצלעות המקסימלי בגרף מכוון בעל קדקודים, ואת זה אוכיח:

המספר המקסימלי מתקבל כאשר מכל קדקוד יוצאת צלע לכל קדקוד אחר. ישנם קדקודים, ומכל אחד יוצאת צלע ל קדקודים, ומכאן שמספר הצלעות הוא בדיוק .

(הדבר שקול לבחירה של 2 קדקודים מתוך הקבוצה כאשר הסדר משמעותי וחזרה אסורה).

### ~~שאלה 11~~

**~~נתון הגרף הבא :~~**

גרף 4

**~~נניח ש- A היא מטריצת סמיכות של גרף 4 בציור.~~**

**~~חשב את A~~~~T~~ ~~ושרטט הגרף שלה. מה משמעות הגרף שקיבלת ביחס ל-G ?~~**

1. **~~חשב AA~~~~T~~~~. מה המשמעות של כל איבר במטריצה שלא נמצא על האלכסון. מה המשמעות של כל איבר הנמצא על האלכסון.~~**
2. **~~חשב A~~~~T~~~~A. מה המשמעות של כל איבר במטריצה שלא נמצא על האלכסון. מה המשמעות של כל איבר הנמצא על האלכסון.~~**
3. **~~חשב A~~~~2~~ ~~ו-~~ ~~3~~~~. A מה המשמעות שלהן?~~**
4. **~~נסח משפט כללי ל - A~~~~n~~ ~~.~~**

### שאלה 12

1. **~~1. מי מהגרפים האלה הם איזומורפיים (אם יש כאלה) ?~~**

### שאלה 13

**א. הוכח שכל גרף מישורי קשיר יש קדקד בעל דרגה לכל היותר 5.**

**ב. הוכח שאם לגרף מישורי וקשיר G בעל  קדקדים ו  צלעות אין מעגלים מאורך 3 אז **

**ג. הסק ש  אינו מישורי.**

לא למדנו גרף מישורי, והמתרגל (נתנאל אלטשולר) אמר שאין צורך לענות על זה.

### שאלה 14

**האם כל גרף שמקיים  הוא בהכרח מישורי ? הוכח את תשובתך.**

לא למדנו גרף מישורי, והמתרגל (נתנאל אלטשולר) אמר שאין צורך לענות על זה.

### ~~שאלה 15~~

**~~מצא נוסחת אויילר עבור גרפים לא קשירים, בהינתן ש- מספר מרכיבי הקשירות בגרף.~~**

### ~~שאלה 16~~

**~~תזכורת : מותן בגרף הוא אורך המעגל הקצר ביתר בגרף.~~**

**~~הוכיחו שעבור כל גרף מישורי, קשיר, עם  קודקודים ו- צלעות ומותן  מתקיים .~~**

### שאלה 17

**הוכיחו כי בכל גרף מישורי פשוט עם לפחות 4 קודקודים, יש לפחות 4 קודקודים עם דרגה קטנה מ-6.**

לא למדנו גרף מישורי, והמתרגל (נתנאל אלטשולר) אמר שאין צורך לענות על זה.

### ~~שאלה 18~~

***~~הוכיחו כי אם בגרף פשוט מתקיים לכל זוג קודקודים לא סמוכים x,y: , אז הגרף קשיר.~~***

נניח בשלילה כי הגרף איננו קשיר. נתבונן בכל הקדקודים הסמוכים ל ובכל הקדקודים הסמוכים ל, ונגיע לזה שמספרם גדול ממספר הקדקודים בגרף. הגענו לסתירה. מ.ש.ל.

### ~~שאלה 19~~

**~~יהי  גרף לא מכוון , , ולכל  כך ש- ~~**

**~~מתקיים . הוכח כי ב- קיים מסלול המילטון.~~**

### ~~שאלה 20~~

**~~יהי G=(V,E) גרף. הוכח שאם |V| = n, |E| = n+4, ואם לכל v∈V קיים deg(v) ≥ 3 אזי~~**

**~~n ≤ 8.~~**

### ~~שאלה 21~~

**~~יהי G=(V,E) גרף. הוכח שאם |V| = 2n, ואם לכל v∈V קיים deg(v) ≥ n אזי G קשיר.~~**

זהו מקרה פרטי של שאלה 18 דלעיל עיי"ש.

### ~~שאלה 22~~

**~~הגדרה:גרף קשיר  נקרא פאון משוכלל אם הוא מישורי, לכל קודקוד דרגה  בדיוק, וכל פאה מוקפת  צלעות בדיוק.~~**

**~~נתון כי  פאון משוכלל עם  פאות.~~**

**~~א) הוכח כי  הסק ש- ~~**

**~~ב) הוכח כי .~~**

**~~ג) הוכח כי יש חמש אפשרויות לערכים :  והצג את האפשרויות בטבלה.~~**

**~~ד) צייר את 5 אפשרויות שמצאת במישור.~~**

### ~~שאלה 23~~

**~~יהי  גרף לא מכוון , , ולכל  כך ש- ~~**

**~~מתקיים . הוכח כי ב- קיים מסלול המילטון.~~**

לא יודע.

### ~~שאלה 24~~

**~~יהי G=(V,E) גרף. הוכח שאם |V| = n, |E| = n+4, ואם לכל v∈V קיים deg(v) ≥ 3 אזי n ≤ 8.~~**

ידוע כי , ולכן כלומר , שזה שקול לאמירה כי .

### ~~שאלה 25~~

**~~יהי G=(V,E) גרף. הוכח שאם |V| = 2n, ואם לכל v∈V קיים deg(v) ≥ n אזי G קשיר.~~**

עיין לעיל שאלה 21 ☺.

### להגשה: 6,9,10,13,14,17